Übungen zu Mathematik I
Blatt 8

Aufgabe 1: Bestimmen Sie bei den folgenden gebrochenrationalen Funktionen die Polstellen und das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{1 - x}{x^2 + x - 2}$

Lösung:

a) Die Polstellen (=Nullstellen des Nenners) lauten $x = \pm 2$. Da diese nicht gleichzeitig um Nullstellen des Zählers handelt, handelt es sich um echte Polstellen und nicht um hebbare Definitionslücken.

   Die Potenz in Zähler und Nenner ist zwei, daher erhalten wir aus den Vorfaktoren den Grenzwert:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2\,.$$

b) Die Nullstellen des Nenners lauten: $x = -2$ und $x = 1$. Da $x = 1$ auch Nullstelle des Zählers ist, handelt es sich hier um eine hebbare Nullstelle, d.h. die einzige Polstelle liegt bei $x = -2$.

   Die Potenz im Nenner ist größer als die Zählerpotenz, daher ist der Grenzwert null.

Aufgabe 2: Wir interessieren uns für das Monotonieverhalten der folgenden Funktion:

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}\,.$$

Untersuchen Sie, ob die Funktion monoton steigend oder fallend ist. Liegt eine lokale oder globale Eigenschaft vor?

Lösung: Es gibt unterschiedliche Lösungsansätze. Der einfachste ist es, eine Wertetabelle (mit Taschenrechner, was auch in der Klausur erlaubt ist) oder eine Skizze anzufertigen. Hierzu kann z.B. auch Wolfram Alpha verwendet werden. Da wir aktuell bewusst noch keine Ableitungen verwenden, da die Studierenden lernen sollen, sich mit Hilfe günstiger Darstellungsformen zu behelfen, fällt diese Option aus.

Abb. 1 zeigt die Wertetabelle und den Funktionsplot. Da die Funktionswerte in der Tabel-

x	f(x)	Delta f
-1	0,2689	
-0,75	0,3208	0,0519
-0,5	0,3775	0,0567
-0,25	0,4378	0,0603
0	0,5000	0,0622
0,25	0,5622	0,0622
0,5	0,6225	0,0603
0,75	0,6792	0,0567
1	0,7311	0,0519

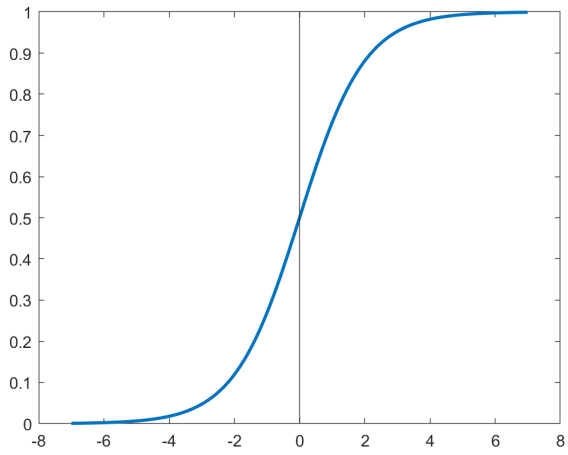


Abbildung 1: Wertetabelle und Plot zu Aufg 2 (logistische Funktion)

le größer werden, kann davon ausgegangen werden, dass die Funktion monoton steigend ist. Dies bestätigt die Differenz zweier aufeinanderfolgender Funktionswerte (3. Spalte), die immer positiv ist.

Aufgabe 3: Wir haben die Messwerte, die in Tabelle 2 gezeigt werden, gemessen. Welches Steigungsverhalten liegt vor, linear, quadratisch oder exponentiell? Beachten Sie, dass es sich ggf. um fehlerbehaftete Messwerte handelt. Sie können zur Beantwortung der Frage den Taschenrechner benutzen.

Lösung: Wir können z.B. die Messwerte zeichnen (vgl. Abb. 3) und auf Grund des optischen Eindrucks das Verhalten bestimmen. Besser wäre es, zusätzlich die Differenzen zwischen den Funktionswerten zu betrachten. Diese wurde in Tabelle 4 berechnet. Hieraus ergibt sich ein vermutlich lineares Wachstum der Messwerte, da die Messpunkte annähernd auf einer Gerade liegen und die Differenzen bis auf Messungenauigkeiten konstant sind. Die Gerade ist aber verschoben, d.h. wir haben keine Ursprungsgerade vorliegen.

Aufgabe 4: Auf ein Teilchen mit der Ladung q und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ übt das Magnetfeld $\vec{B}$ die Lorentz-Kraft aus:

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})\,.$$

Von welchen der folgenden Größen hängt die Kraft linear ab?

i) Der Ladung q.

x	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	0,75	1
y	-1	-0,535	-0,01	0,465	0,995	1,52	2,01	2,495	3,045

Abbildung 2: Messdaten zu Aufgabe 3

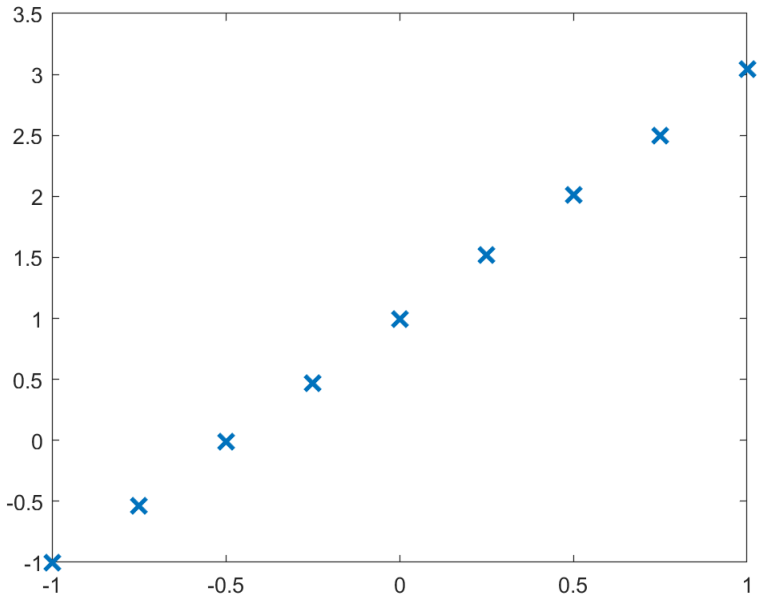


Abbildung 3: Plot der Messdaten zu Aufgabe 3

x	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	0,75	1
y	-1	-0,535	-0,01	0,465	0,995	1,52	2,01	2,495	3,045
Diff		-0,465	-0,525	-0,475	-0,53	-0,525	-0,49	-0,485	-0,55

Abbildung 4: Messdaten mit Differenzen zu Aufgabe 3

ii) Der Geschwindigkeit $\vec{v}$.

iii) Dem Magnetfeld $\vec{B}$.

Lösung:

i) linearer Zusammenhang, z.B. wenn q verdoppelt wird, verdoppelt sich auch die Kraft

ii) linearer Zusammenhang, da das Vektorprodukt linear ist, d.h. doppeltes $\vec{v}$ liefert doppelte Kraft und auch Summen können auseinandergezogen werden (siehe: Rechenregeln des Vektorproduktes)

iii) linearer Zusammenhang, analog zu ii)

Aufgabe 5: Bei welchen der folgenden Abbildungen handelt es sich um lineare bzw. affin lineare Abbildungen. Bestätigen Sie Ihre Vermutung, indem Sie die zugehörige Matrix aufstellen bzw. die zugehörige Matrix und den Verschiebungsvektor angeben.

i) $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - 1 \\ x_2 - x_3 + 1 \end{pmatrix}$

ii) $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_3^2 \end{pmatrix}$

iii) $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

Lösung:

i) $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - 1 \\ x_2 - x_3 + 1 \end{pmatrix}$

Affin Linear mit folgender Darstellung:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii) $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_3^2 \end{pmatrix}$

Die Abbildung ist wegen dem Quadrat weder linear noch affin linear.

iii) $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

Die abbildung ist linear, mit der Darstellung:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Freiwillige Zusatzaufgabe: Ein Schullandheim schafft für 3000 Euro Fahrräder an. Es sollen mindestens 3 Kinderräder für je 100 Euro und mindestens 6 Jugendräder für je 250 Euro angeschafft werden. Wegen der Altersverteilung der Gäste soll die Zahl der Jugendräder größer als die Anzahl der Kinderräder sein. Wie viele Räder können maximal angeschafft werden?

Lösung:

i) Welche Größe soll maximiert werden? Wie sieht dann die Zielfunktion aus?

Es sollen so viele Räder wie möglich angeschafft werden, was bedeutet, dass die Anzahl der Räder maximiert werden soll. Daraus ergibt sich die Zielfunktion $F(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, wenn x_1 die Anzahl der Kinderräder und x_2 die Anzahl der Jugendräder bezeichnet.

ii) Es gibt insgesamt vier Nebenbedingungen (Ungleichungen). Wie sehen diese aus?

Wir finden im Aufgabentext die folgenden Bedingungen:

- Mindestens drei Kinderräder: $x_1 \geq 3$.
- Mindestens sechs Jugendräder: $x_2 \geq 6$.
- Mehr Jugend- als Kinderräder: $x_2 \geq x_1$.
- Die Budgetobergrenze ist 3000 Euro und die Räder kosten 100 bzw. 250 Euro: $100x_1 + 250x_2 \leq 3000$.

iii) Zeichnen Sie den zulässigen Bereich, der sich aus den Nebenbedingungen ergibt. Wie lautet die Lösung des Optimierungsproblems?

Die ersten beiden Bedingungen liefern zwei Geraden, die parallel zur x_1 bzw. x_2 Achse sind. Die restlichen Nebenbedingungen liefern Geraden, wenn wir die Ungleichheitszeichen durch ein Gleichheitszeichen ersetzen und nach x_2 auflösen. Diese können wir zeichnen. Das Ergebnis zeigt Abb. 5. Wir zeichnen zusätzlich die Gerade, welche die Zielfunktion zum Wert F_0 beschreibt:

$$x_1 + x_2 = F_0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = F_0 - x_1$$

Wenn wir diese gerade nach rechts oben verschieben, wird der Wert für F_0 größer. Wir suchen als die Gerade, die so weit wie möglich nach oben geschoben wurde, aber

gerade noch den zulässigen Bereich schneidet. Hierbei ist allerdings zu beachten, dass die Lösung ganzzahlig sein muss, da wir nur komplette Räder kaufen können. Die Lösung sehen wir in Abb. 5. Es werden sieben Kinder und neun Jugendräder, also insgesamt 16 Räder gekauft.

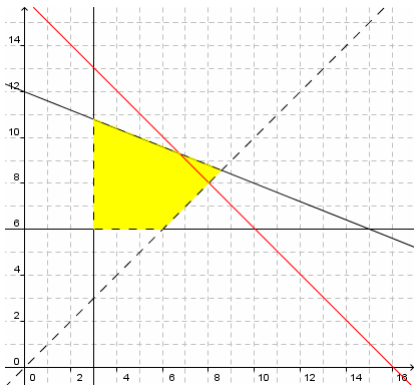


Abbildung 5: Zulässiger Bereich und Lösung zur Zusatzaufgabe